Fonctions III
Sens de variation

Les réponses des exercices sont téléchargeables sur le site
MathEnSeconde.fr

Définition

Exercice 1

Commencer au brouillon.
$f : x \mapsto 2x+1$. Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

$f : x \mapsto -3(x+1)$. Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

$f : x \mapsto \dfrac{1-x}{2}$. Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Fonctions usuelles

Démonstrations du cours

Exercice 4

Démonstration d'un théorème du cours.
$f : x \mapsto x^2$. Démontrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Exercice 5

Démonstration d'un théorème du cours.
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.

Applications

Exercice 6

On pose : $f : x \mapsto 3-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

Démontrer que f est *monotone* sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;1[$, en donnant le sens de variation dans chaque cas.
Dresser le tableau des variations de f.
Vérifier en faisant tracer la courbe par une calculatrice graphique.

Exercice 7

$f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Signe de la différence des images

Exercice 8

Commencer au brouillon.
Soit f la fonction définie par :
Quel que soit x réel, $f(x)=x^2-2x$
Démontrer que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :
Quel que soit x réel, $f(x)=x-x^2$
Démontrer que f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice 10

$f : x \mapsto x^2+x+1$. Démontrer que f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Exercice 11

$f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Démontrer que f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 12

$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

Exercice 13

On pose : $f : x \mapsto x + \frac{2}{x}$

Démontrer que f est décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

Dresser le *tableau des variations* de f sur $]0;+\infty[$ en indiquant la valeur minimale prise par $f(x)$ lorsque x varie sur $]0;+\infty[$.

Vérifier en faisant tracer la courbe par une calculatrice graphique.

Exercice 14

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Exercice 15

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Étude d'un problème à l'aide d'une fonction.

Exercice 16

Maximiser l'aire d'un rectangle de périmètre donné.

Considérons un rectangle de dimensions variables, mais dont le périmètre est fixé à 2dm.

Notons x et y les dimensions (en dm) de ce rectangle (largeur et longueur).

a) Exprimer l'aire $S(x)$ (en dm²) du rectangle en fonction de la seule variable x. Développer l'expression obtenue.

b) *Sans justification*, donner le domaine de définition de la fonction S, en tenant compte de l'aspect géométrique du problème.

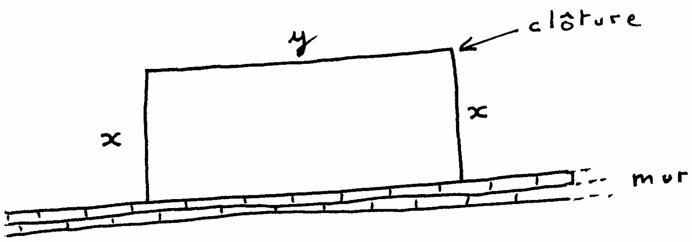
c) Tracer la représentation graphique de la fonction S avec une calculatrice graphique. En choisissant convenablement les paramètres d'affichage, de façon à avoir une estimation de la valeur de x pour laquelle $S(x)$ est maximale.

d) Démontrer que S est croissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$. Dresser le tableau des variations de la fonction S.

e) Expliquer dans quel cas le rectangle a une aire maximale.

Exercice 17

Vu d'en haut :



On veut délimiter un terrain rectangulaire de 1km² le long d'un mur, avec une clôture. Le long du mur, la clôture est inutile de sorte qu'elle ne longera que trois côtés du rectangle. Notons x et y les dimensions, en km, de ce rectangle, telles qu'indiquées sur la figure.

a) Exprimer la longueur totale $L(x)$ de la clôture, en fonction de la seule variable x.

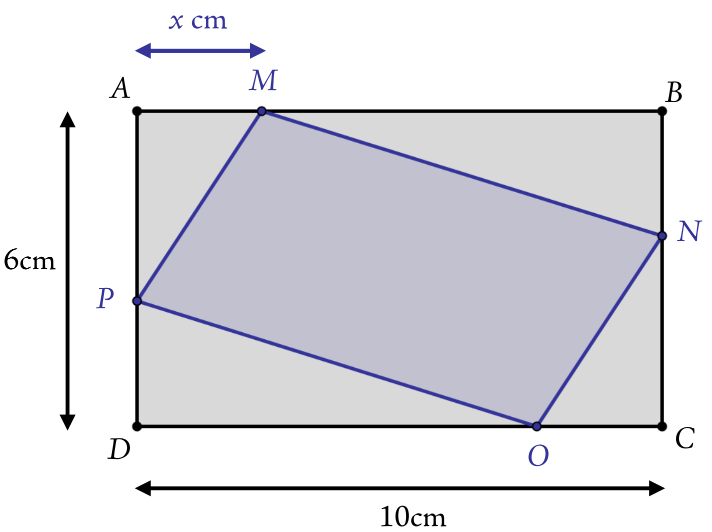
b) Donner le domaine de définition de la fonction L (en tenant compte de l'aspect géométrique du problème).

c) Tracer la courbe représentative de la fonction L avec une calculatrice graphique, en choisissant convenablement les paramètres d'affichage, de façon à obtenir une bonne estimation de la valeur de x pour laquelle $L(x)$ est minimale.

d) Démontrer que la fonction L est décroissante sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$. Dresser le tableau des variations de la fonction L.

e) Déterminer la longueur minimale de clôture qu'il faudra prévoir en arrondissant au mètre près par excès.

Exercice 18



Considérons un rectangle $ABCD$ de longueur 10cm et de largeur 6cm. Soient M, N, O et P quatre points appartenant respectivement aux côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et telles que $AM = BN = CO = DP$. Notons x cette mesure commune (en cm).

On pourra démontrer que le quadrilatère $MNOP$ est un parallélogramme, mais ce n'est ni exigé ni utile pour la suite de l'exercice.

a) Exprimer l'aire $A(x)$ du quadrilatère $MNOP$ (en cm^2) en fonction de seule variable x.

b) Donner le domaine de définition de la fonction A (en tenant compte de l'aspect géométrique du problème).

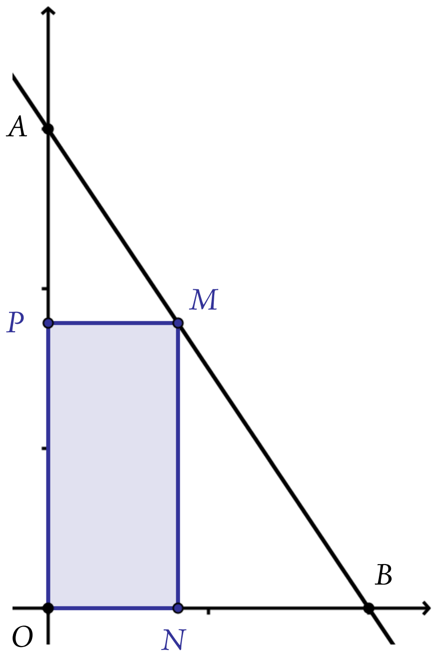
c) Tracer la représentation graphique de la fonction A avec une calculatrice graphique. En choisissant convenablement les paramètres d'affichage, de façon à avoir une estimation de la valeur de x pour laquelle $A(x)$ est minimale.

d) Mettre $A(x)$ sous la forme $2\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$, où α et β sont des constantes dont on précisera la valeur.

e) Démontrer que A est décroissante sur $[0;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;6]$. (Il est inutile de passer par la différence des images.)
Dresser le tableau des variations de la fonction A.

f) Dessiner la figure dans le cas où l'aire de $MNOP$ est minimale.

Exercice 19



Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé d'unité 1cm, on pose : $A(0;3)$ et $B(2;0)$.

a) Déterminer une équation de (AB). *Dans cette question, seule la réponse finale est demandée.*

Soit $M(x;y)$ un point appartenant au segment $[AB]$. On note N le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et P le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

b) Exprimer la mesure en cm^2 de l'aire $A(x)$ du rectangle $MNOP$ en fonction de la seule variable x. Mettre l'expression sous la forme : $\alpha\left(-x^2+2x\right)$, où α est une constante positive dont on précisera la valeur.

On pose : $f : x \mapsto -x^2+2x$.

c) Démontrer que f est croissante sur $[0;1]$.

On démontrerait de même que f est décroissante sur $[1;2]$.

d) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;2]$.

e) Quelle est l'aire maximale de $MNOP$?

Encadrements

Dans les exercices qui suivent, on vous demandera d'encadrer une expression (par des constantes) connaissant certaines informations sur ses variables. Faites un encadrement le plus « serré » que vous pouvez, mais sans vous soucier de prouver que c'est l'encadrement le plus « serré » possible.

Exercice 20

Sachant que $-2 \leq x \leq -1$, encadrer $5 - x^2$.

Exercice 21

Sachant que $x \leq -1$, que peut-on dire de $\sqrt{x^2+3}$?

Exercice 22

Encadrer $\dfrac{x}{y}$ sachant que :

a) $\begin{cases} 5 \leq x \leq 8 \\ 4 \leq y \leq 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5 \leq x \leq 8 \\ -5 \leq y \leq -4 \end{cases}$

Exercice 23

$$A = 3 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

a) Que peut-on dire de A lorsque $x \geq 3$?
b) Que peut-on dire de A lorsque $x \leq -3$?

Exercice 24

Sachant que $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$ encadrer : $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

Approfondissements

Exercice 25

D'après un exercice de Gilles Costantini.

Sans calculatrice, comparer

$a = 5 - \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{26 - 10\sqrt{2}}$

Exercice 26

D'après un exercice de Gilles Costantini.

Comparer $a = \sqrt{1 - 10^{-19}}$ et $b = 1 - 10^{-18}$

Exercice 27

a et b étant deux réels strictement positifs, démontrer que :

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Exercice 28

On pose : $g : x \mapsto x - \sqrt{x}$

Faire tracer la courbe représentative de g par une calculatrice graphique.

Démontrer que g est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

Dresser le tableau des variations de g.

Si nécessaire, ajuster les paramètres d'affichage de façon que les variations de g soient bien visibles sur l'écran.